第 30 卷第 4 期　　安 徽 建 筑 大 学 学 报　　Vol.30 No.4
2022 年 8 月　　Journal of Anhui Jianzhu University　　Aug.2022

DOI:10.11921/j.issn.2095-8382.20220405

附加约束条件的坐标转换参数求解方法

王骈臻，林　鹏

（安徽建筑大学　土木工程学院，安徽　合肥　230601）

摘　要：针对坐标转换问题，基于最小二乘原理以及高斯—马尔柯夫模型，研究了约束解法与非约束解法对坐标转换参数求解的影响。以三维坐标转换模型为研究对象，通过仿真实验分别探讨其约束解法与非约束解法在大、小旋转角情况下求解参数的精度情况，并以求得参数的均方差为精度评定的指标。实验结果显示：小旋转角情况下，坐标转换模型的约束解法与非约束解法精度一致，布尔莎模型运算速率最快；大旋转角情况下，线性模型误差较大，非线性模型的约束解法与非约束解法精度一致，非线性十三参数（虚拟观测值法）运算速率最快。实验结果表明：线性模型仅适用于小旋转角情况下的坐标转换参数求解，非线性十三参数模型（虚拟观测值法）适用于大旋转角情况下的坐标转换参数求解。

关键词：坐标转换；高斯—马尔柯夫模型；最小二乘

中图分类号：P226+.3　　**文献标识码：**A　　**文章编号：**2095-8382（2022）04-027-08

Method for Solving Coordinate Transformation Parameters with Additional Constraints

WANG Pianzhen，LIN Peng

（College of Civil Engineering，Anhui Jianzhu University，Hefei 230601，China）

Abstract：Based on the least squares principle and Gauss-Markov model，the effects of constrained and unconstrained solutions on the solution of coordinate transformation parameters are investigated. The accuracy of the constrained and unconstrained solutions for large and small rotation angles is investigated by simulation experiments with three-dimensional coordinate transformation models，and the standard deviation of the obtained parameters is used as the index for accuracy evaluation. The experimental results show that in the case of small rotation angle，the accuracy of the constrained and unconstrained solutions of the coordinate transformation model is the same and the rate of the Bursa model is the fastest；in the case of large rotation angle，the error of the linear model is larger，the accuracy of the constrained and unconstrained solutions of the nonlinear model is the same，and the rate of the nonlinear thirteen parameters （with virtual observation method） is the fastest. Therefore，the linear Bursa model is only applicable for solving the coordinate transformation parameters in the case of small rotation angle，and the nonlinear thirteen-parameter model （virtual observation method） is applicable for solving the coordinate transformation parameters in the case of large rotation angle.

Keywords：coordinate transformation；Gauss-Markov model；least squares

由于研究对象不同，不同的坐标系被建立来准确描述对象的位置信息。这些坐标系的原点定义、坐标轴指向以及单位长度都不尽相同，故相同点位在不同坐标系下有不同的坐标值。当不同坐标系之间发生联系时，需要将点位转换到相应的坐标系内。坐标转换的关键在于求解转换参数，在以往的

收稿日期：2021-10-21

基金项目：安徽省自然科学基金青年基金项目（2008085QD179）

作者简介：王骈臻（1999-），男，硕士研究生，研究方向：现代测量数据处理与分析。

工作中，线性坐标转换模型经常被用来求取转换参数。张飞等[1]比较了三种常用线性模型的转化结果以及相关系数矩阵。孔钰如[2]基于布尔莎模型分析得出了公共点的个数越多以及分布越均匀，中误差越小的结论。尹慧芳等[3]通过济宁矿区坐标转换实例以及模拟算例得出，七参数线性模型能够有效减小模型误差、提高转换精度，但随着旋转角不断增大，七参数线性模型求解会产生较大的误差。

线性转换模型仅适合旋转角较小的情况，随着测量技术的发展，例如在三维激光扫描方面，点云配准就需要确定任意旋转角下的三维坐标转换参数。面对大旋转角情况下的坐标转换，广大学者进行了无数的探索，曾文宪等[4]将非线性模型线性化产生的误差作为函数模型的模型误差进行处理。姚宜斌等[5]提出了一种不需要知道近似值并且同时适用于大、小旋转角情况的算法。Grafarend 等[6]利用 Procrustes 算法来解决七参数坐标变换问题中涉及两个坐标系的随机性度量的合并问题。吕志鹏等[7]用四元数来表示三维旋转矩阵。王世达等[8]提出了三种在无初始值、不需线性化和迭代的条件下，仅通过简单的矩阵运算就可以获得结果的算法，面对不同的角度都有满意的结果。

在传统的七参数转换模型内，旋转矩阵内的九个元素仅有三个是独立的，如果直接解算七参数，过程将非常繁琐。陈义等[9]将参数之间相互独立、非线性的三维坐标转换模型转换为参数之间相互联系、准线性的三维坐标转换模型。马下平等[10]介绍了附有约束条件的大旋转角空间直角坐标转换模型的建立过程，证明了该理论方法的严密性。

综上所述，本文将基于经典最小二乘原理，研究在大、小旋转角情况下，坐标转换参数的约束与非约束解法的效率与精度。

1 实验原理与方法

两个坐标系之间的对称 Helmert 转换模型表达式为：

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} + (1+m)\boldsymbol{R} \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

式中，ΔX、ΔY、ΔZ 为三个平移参数，m 为两个坐标系之间的尺度参数，R 为两个坐标系之间的旋转矩阵。

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \cos\omega_Z \cos\omega_Y & \cos\omega_Z \sin\omega_Y \sin\omega_X + \sin\omega_Z \cos\omega_X & \sin\omega_Z \sin\omega_X - \cos\omega_Z \sin\omega_Y \cos\omega_X \\ -\sin\omega_Z \cos\omega_Y & \cos\omega_Z \cos\omega_X - \sin\omega_Z \sin\omega_Y \sin\omega_X & \sin\omega_Z \sin\omega_Y \cos\omega_X + \cos\omega_Z \sin\omega_X \\ \sin\omega_Y & -\cos\omega_Y \sin\omega_X & \cos\omega_Y \cos\omega_X \end{bmatrix}$$

1.1 非约束解法

我们对式（1）在参数初值 ΔX^0，ΔY^0，ΔZ^0，ω_X^0，ω_Y^0，ω_Z^0，λ^0 处进行泰勒级数展开并忽略二次及以上的项，可以得到：

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta X^0 \\ \Delta Y^0 \\ \Delta Z^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathrm{d}\Delta X \\ \mathrm{d}\Delta Y \\ \mathrm{d}\Delta Z \end{bmatrix} + \lambda^0 \boldsymbol{R}^0 \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} + \boldsymbol{R}^0 \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} \mathrm{d}\lambda + \lambda^0 \mathrm{d}\boldsymbol{R} \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

式（2）可归纳为

$$\boldsymbol{X}_T = \boldsymbol{R}'\boldsymbol{x} - \boldsymbol{l} \tag{3}$$

式中 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} = [X_2, Y_2, Z_2]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{R}' = [\boldsymbol{I}, \lambda_0 \boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}]$

$$\hat{\boldsymbol{x}} = [\mathrm{d}T_X, \mathrm{d}T_Y, \mathrm{d}T_Z, \mathrm{d}\omega_Z, \mathrm{d}\omega_Y, \mathrm{d}\omega_X, \mathrm{d}\lambda]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{R}^0 \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{l} = -\begin{bmatrix} \Delta X^0 \\ \Delta Y^0 \\ \Delta Z^0 \end{bmatrix} - \lambda^0 \boldsymbol{R}^0 \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \omega_Z} \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} & \dfrac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \omega_Y} \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} & \dfrac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \omega_X} \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

由式(3)可得到误差方程

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{R}'\hat{\boldsymbol{x}}-(\boldsymbol{l}+\boldsymbol{X}_T) \tag{4}$$

此时,$\hat{\boldsymbol{x}}$为七参数估值的改正数。为了得到参数的最优估值,可通过最小二平差法则进行迭代计算。

1.2　约束解法

1.2.1　约束条件法

由于非线性七参数模型内有较多关于方向余弦的矩阵,求解过程繁琐。因此有学者提出将旋转矩阵内的九个元素设为参数,直接求取这九个参数。

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{bmatrix} \tag{5}$$

旋转矩阵 R 是一个正交矩阵,严格遵循正交矩阵的性质:$\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$,故我们可以从中得到参数之间的关系:

$$\begin{cases}\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=1\\ \beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2=1\\ \gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=1\\ \alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2=0\\ \alpha_1\alpha_3+\beta_1\beta_3+\gamma_1\gamma_3=0\\ \alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3+\gamma_2\gamma_3=0\end{cases} \tag{6}$$

在这九个参数中,仅有三个是独立参数,其余的六个参数都可以被这三个参数表示。若我们假设α_2、α_3、β_3为独立的参数,剩下的六个参数可以表达为:

$$\alpha_1=\sqrt{1-\alpha_2^2-\alpha_3^2}\ ;\ \beta_1=\frac{-\alpha_1\alpha_3\beta_3-\alpha_2\gamma_3}{1-\alpha_3^2}\ ;$$

$$\beta_2=\sqrt{1-\beta_1^2-\beta_3^2}\ ;\ \gamma_1=\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2\ ;$$

$$\gamma_2=\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3\ ;\ \gamma_3=\sqrt{1-\alpha_3^2-\beta_3^2}\ ;$$

用式(5)替代式(1)中的旋转矩阵 R,设待求的参数为三个平移参数,一个尺度参数和九个方向余弦参数。利用泰勒级数对替代后的式子在参数处展开,可以得到:

$$\begin{bmatrix}X_2\\ Y_2\\ Z_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Delta X^0\\ \Delta Y^0\\ \Delta Z^0\end{bmatrix}+\lambda^0\begin{bmatrix}\alpha_1^0 & \alpha_2^0 & \alpha_3^0\\ \beta_1^0 & \beta_2^0 & \beta_3^0\\ \gamma_1^0 & \gamma_2^0 & \gamma_3^0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1\\ Y_1\\ Z_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathrm{d}\Delta X\\ \mathrm{d}\Delta Y\\ \mathrm{d}\Delta Z\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\alpha_1^0X_1+\alpha_2^0Y_1+\alpha_3^0Z_1\\ \beta_1^0X_1+\beta_2^0Y_1+\beta_3^0Z_1\\ \gamma_1^0X_1+\gamma_2^0Y_1+\gamma_3^0Z_1\end{bmatrix}\mathrm{d}\lambda$$

$$+\begin{bmatrix}K^0X_1 & K^0Y_1 & K^0Z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & K^0X_1 & K^0Y_1 & K^0Z_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K^0X_1 & K^0Y_1 & K^0Z_1\end{bmatrix}. \tag{7}$$

$$\begin{bmatrix}\mathrm{d}\alpha_1 & \mathrm{d}\alpha_2 & \mathrm{d}\alpha_3 & \mathrm{d}\beta_1 & \mathrm{d}\beta_2 & \mathrm{d}\beta_3 & \mathrm{d}\gamma_1 & \mathrm{d}\gamma_2 & \mathrm{d}\gamma_3\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

当拥有三个或三个以上公共点时,误差方程的表达式为:

$$\boldsymbol{V}_i=\boldsymbol{B}_i\hat{\boldsymbol{x}}_i-\boldsymbol{l}_i \tag{8}$$

式中:

$$\boldsymbol{V}_i=\begin{bmatrix}V_{xi} & V_{yi} & V_{zi}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{B}_i=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \alpha_1^0X_1+\alpha_2^0Y_1+\alpha_3^0Z_1 & K^0X_1 & K^0Y_1 & K^0Z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & \beta_1^0X_1+\beta_2^0Y_1+\beta_3^0Z_1 & 0 & 0 & 0 & K^0X_1 & K^0Y_1 & K^0Z_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \gamma_1^0X_1+\gamma_2^0Y_1+\gamma_3^0Z_1 & K^0X_1 & K^0Y_1 & K^0Z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{9}$$

$$\boldsymbol{l}_i=\begin{bmatrix}X_2\\ Y_2\\ Z_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\Delta X^0\\ \Delta Y^0\\ \Delta Z^0\end{bmatrix}-\lambda^0\begin{bmatrix}\alpha_1^0 & \alpha_2^0 & \alpha_3^0\\ \beta_1^0 & \beta_2^0 & \beta_3^0\\ \gamma_1^0 & \gamma_2^0 & \gamma_3^0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1\\ Y_1\\ Z_1\end{bmatrix} \tag{10}$$

$$\hat{x}_i=\begin{bmatrix}\mathrm{d}\Delta X & \mathrm{d}\Delta Y & \mathrm{d}\Delta Z & \mathrm{d}\lambda & \mathrm{d}\alpha_1 & \mathrm{d}\alpha_2 & \mathrm{d}\alpha_3 & \mathrm{d}\beta_1 & \mathrm{d}\beta_2 & \mathrm{d}\beta_3 & \mathrm{d}\gamma_1 & \mathrm{d}\gamma_2 & \mathrm{d}\gamma_3\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

再根据式(6)列出条件方程：

$$\boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{W}=0 \tag{11}$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&2\alpha_1^0&2\alpha_2^0&2\alpha_3^0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&2\beta_1^0&2\beta_2^0&2\beta_3^0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&2\gamma_1^0&2\gamma_2^0&2\gamma_3^0\\0&0&0&0&\alpha_2^0&\alpha_1^0&0&\beta_2^0&\beta_1^0&0&\gamma_2^0&\gamma_1^0&0\\0&0&0&0&\alpha_3^0&0&\alpha_1^0&\beta_3^0&0&\beta_1^0&\gamma_3^0&0&\gamma_1^0\\0&0&0&0&0&\alpha_3^0&\alpha_2^0&0&\beta_3^0&\beta_2^0&0&\gamma_3^0&\gamma_2^0\end{bmatrix} \tag{12}$$

$$\boldsymbol{W}=\begin{bmatrix}\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2-1\\\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2-1\\\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2-1\\\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2\\\alpha_1\alpha_3+\beta_1\beta_3+\gamma_1\gamma_3\\\alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3+\gamma_2\gamma_3\end{bmatrix} \tag{13}$$

此时可利用最小二乘原理进行迭代计算来求解参数的最佳估值。

1.2.2 虚拟观测值法

虚拟观测值法的基本思想是将设计矩阵中含有测量误差的元素当作虚拟观测值，在原有误差方程的基础上增加虚拟误差方程，同时将设计矩阵中含有误差的元素在新算法中当作参数求解[11]。虚拟观测值法将附有约束条件的间接平差问题简化为经典间接平差问题，简化了计算步骤，使得计算更加方便。

本文将约束条件方程内的元素视为无误差，即约束条件方程元素的权无限大。在计算时可使用相对较大的数字替代，本次实验将约束条件元素的权设为 10^{12}。则虚拟观测值法的权阵 P_1 为：

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}\boldsymbol{P} & zeros(3\times k,6)\\ zeros(6,3\times k) & 10^{12}\times eye(6)\end{bmatrix} \tag{14}$$

式中 $\boldsymbol{P}$ 为观测方程的权阵，k 代表公共点个数，$zeros(n,m)$ 代表一个 n 行 m 列的零矩阵，$eye(q)$ 代表一个 q 维的单位矩阵。

当拥有三个或三个以上公共点时，可列出误差方程：

其中，$\hat{\boldsymbol{x}}$ 的含义与式(8)相同。C 与 W 分别为：

$$\boldsymbol{V}_i=\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{L}_i \tag{15}$$

$\boldsymbol{A}_i$ 为式(9)与式(12)的上下叠加矩阵，$\boldsymbol{L}_i$ 为式(10)与式(13)的上下叠加矩阵。

此时便可根据最小二乘原理进行迭代计算来求解参数的最佳估值。

2 实验分析

本次实验分为两部分：第一部分是在小旋转角情况下解算转换参数；第二部分是大旋转角情况下解算转换参数。实验步骤如下：

(1)仿真 19 个点的源坐标系坐标，任取 18 个点作为公共点参与解算，剩下的点作为检核点，给出七参数的真值，得到点位在目标坐标系内的坐标真值。

(2)随机生成各点的中误差，利用随机函数给真值加上误差，生成观测值，共生成 1 000 次。设先验权中误差为 σ_0，则每个坐标的定权情况分别如下：

$$P_{xi}=\sigma_0^2/\sigma_{xi}^2,\ P_{yi}=\sigma_0^2/\sigma_{yi}^2,\ P_{zi}=\sigma_0^2/\sigma_{zi}^2$$

(3)利用外推点验证解算参数的精度。

(4)采用均方根误差作为精度评定的标准，迭代收敛阈值为 10^{-8}。

2.1 实验一(小旋转角)

假定源坐标系与目标坐标系之间的七个转换参数分别为 ΔX =1 000 m，ΔY =1 000 m，ΔZ =−1 000 m，λ =1.000 000 1(尺度参数)，α =0.5″，β =0.5″，γ =0.5″。对各模型求取的参数估值与参数真值之间求取均方根误差，结果见表 1。为了

更好地进行比较,将十三参数进行了还原。

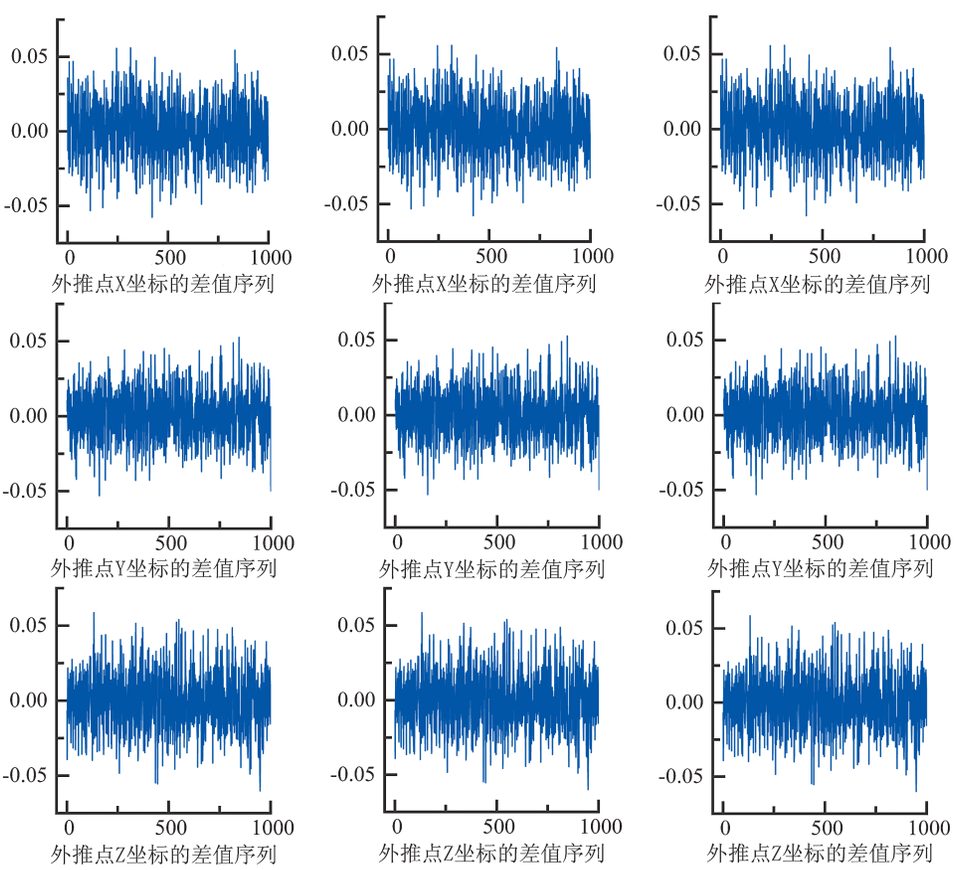
在旋转角比较小的情况下,线性布尔莎模型由于近似替代而造成的误差非常小。而非线性模型由于旋转矩阵本身的非线性特性,在起初就削弱了近似替代产生的误差,而且泰勒展开产生的误差非常小,可以忽略不计。结合表 1 内容,可以得到线性化模型和非线性化模型都适用于旋转角较小时的坐标转换参数求解。

图 1 给出了外推点分别在三个坐标转换模型下的差值序列。从图 1 中我们可以看出,利用线性布尔莎模型、非线性七参数模型和非线性十三参数模型所求参数转换的点位坐标在 X、Y、Z 方向的差值序列的范围分别在 –0.05~0.05 m、–0.05~0.05 m、–0.05~0.05 m,说明虽然线性模型较非线性模型没那么严密,但是在小角度的情况下还是适用。

图 2 是各模型的单次计算时间汇总。从图 2 我

表 1　小旋转角(三维坐标转换)转换参数的均方根误差

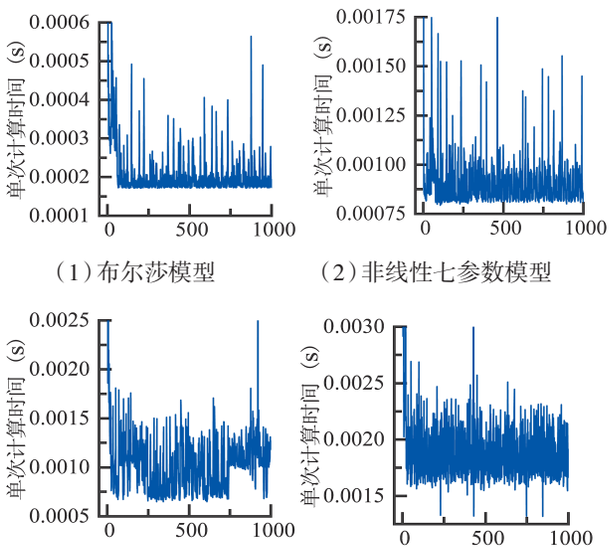
RMES	布尔莎模型	非线性七参数模型	非线性十三参数模型	
			虚拟观测法	约束条件法
$M_{\Delta X}$(±m)	3.555 7	3.555 8	3.555 8	3.555 8
$M_{\Delta Y}$(±m)	4.060 9	4.061 2	4.061 2	4.061 2
$M_{\Delta Z}$(±m)	5.4446	5.443 6	5.443 6	5.443 6
$M_{\Delta K}$	0.000 005 5	0.000 005 5	0.000 005 5	0.000 005 5
M_{α}(±″)	0.025 7	0.025 7	0.025 7	0.025 7
M_{β}(±″)	0.025 4	0.025 4	0.025 4	0.025 4
M_{γ}(±″)	0.024 7	0.024 7	0.024 7	0.024 7
平均迭代次数	—	3	3	5.297



(1)线性布尔莎模型　(2)非线性七参数模型　(3)非线性十三参数模型

图 1　小旋转角下外推点的差值序列

们可以得到，小角度情况下，布尔莎模型单次计算时间的范围在 0.000 15~0.000 6 s 之间，非线性七参数模型单次计算时间的范围在 0.000 6~0.001 75 s 之间，非线性十三参数模型两种计算方法分别在 0.000 3~0.002 5 s 以及 0.001~0.003 s 之间。再结合表 1 内各模型计算得到参数的均方差以及各计算模型的平均迭代次数，可以得出，在旋转角较小的情况下，比较适合使用布尔莎模型来进行计算。



（1）布尔莎模型　（2）非线性七参数模型

（3）虚拟观测值法　（4）约束条件法

图 2 小旋转角下各模型单次仿真计算时间

2.2 实验二（大旋转角）

设源坐标系和目标坐标系之间的 7 个转换参数分别为 ΔX =1 000 m，ΔY =1 000 m，ΔZ =1 000 m，λ =2，α =36″，β =36″，γ =36″。对各模型求取的参数估值与参数真值之间求取均方根误差，结果见表。为了更好地进行比较，将十三参数进行了还原。

我们可以从表 2 中得出：

（1）在旋转角较大的情况下，线性布尔莎模型求得的七个参数估值严重偏离真值。而非线性十三参数模型与非线性七参数模型求得的参数与真值较为接近，且这两个模型求得的参数估值一致。

（2）从均方差的结果来看，两种非线性模型的均方差值一致。这是因为这二者的本质都是利用泰勒展开对坐标转换公式进行线性化并且只保留一次项，所以这两个模型的精度是一样的。

（3）从迭代次数上来看，虚拟观测值法所需的迭代次数要远少于非线性七参数模型，这是因为虚拟观测值法优化了系数矩阵，使得计算更加简便。

在图 3 中，我们可以看到布尔莎模型解算的外推点的坐标在 X、Y、Z 三个方向的序列差值分别为 99 690~99 710 m、109 005~109 025 m、137 400~137 450 m，转换得到的参数与真值严重不符合，再次证明了布尔莎模型仅在旋转角较小的情况时适用。非线性七参数模型和非线性十三参数模型解算的外推点坐标在 X、Y、Z 三个方向的序列差值分别为 −0.15~0.15 m、−0.15~0.15 m、−0.1~0.1 m。可以得出，在大旋转角情况下，非线性模型推算的点坐标与真值之间的差距很小。

图 4 内是各模型在大旋转角情况下单次仿真的计算时间。从图 4 内我们可以看出，在大旋转角的情况下，非线性七参数模型、虚拟观测值法以及约束条件法的单次仿真计算时间范围分别集中在 0.004~0.04 s、0.002 25~0.005 s、0.003 9~3 s 之间。在三种计算方案中，虚拟观测值法的计算时间最短，它的计算效率比非线性七参数模型提高了约 500%，比约束条件法提高了约 1 500%。

综上所述，在大旋转角的情况下，非线性十三

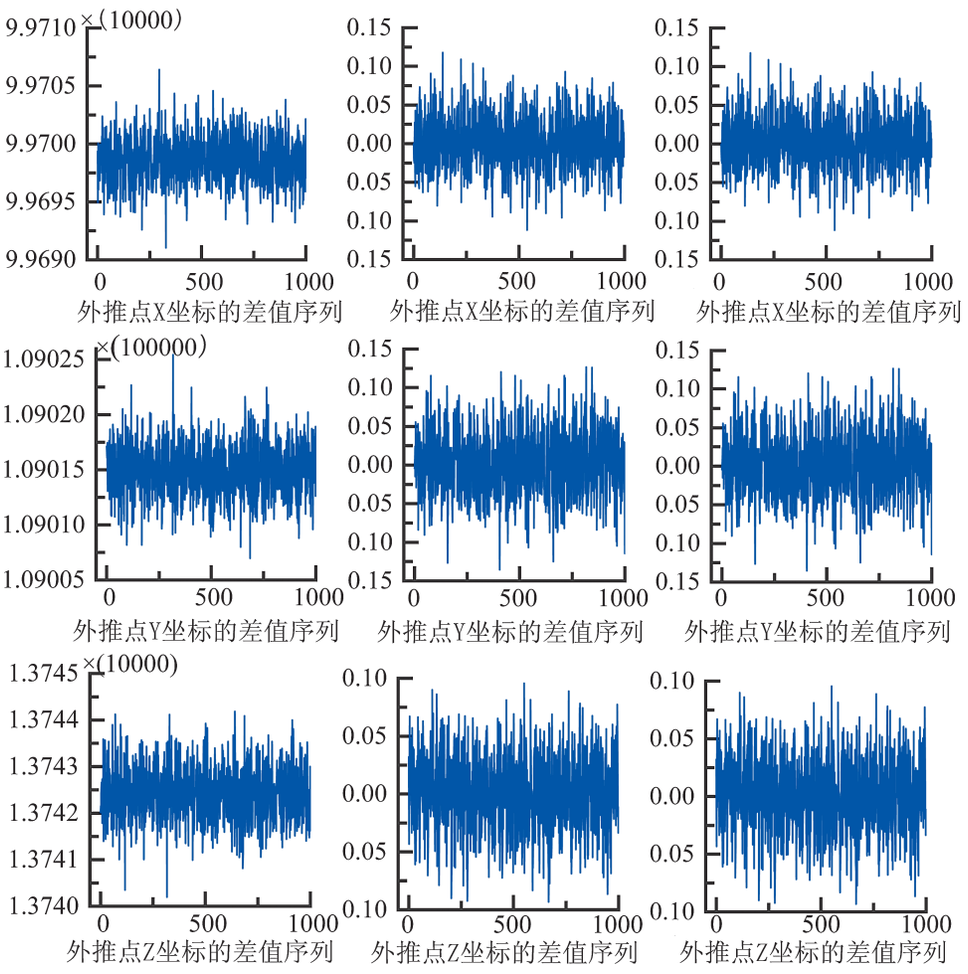
表 2 大旋转角（三维坐标转换）转换参数的均方根误差

RMES	布尔莎模型	非线性七参数模型	非线性十三参数模型	
			虚拟观测法	约束条件法
$M_{\Delta X}$（±m）	174 429.2	6.299 0	6.299 0	6.299 0
$M_{\Delta Y}$（±m）	556 567.8	9.134 8	9.134 8	9.134 8
$M_{\Delta Z}$（±m）	618 408.7	8.953 9	8.953 9	8.953 9
$M_{\Delta K}$	0.64	0.000 012	0.000 012	0.000 012
M_{α}（±″）	2 106.2	0.025 9	0.025 9	0.025 7
M_{β}（±″）	353.7	0.018 3	0.018 3	0.018 3
M_{γ}（±″）	2 371.5	0.029 5	0.029 5	0.029 5
平均迭代次数	—	35.717	11.001	200.734

参数模型（虚拟观测值法）比较适合用来求解转换参数。

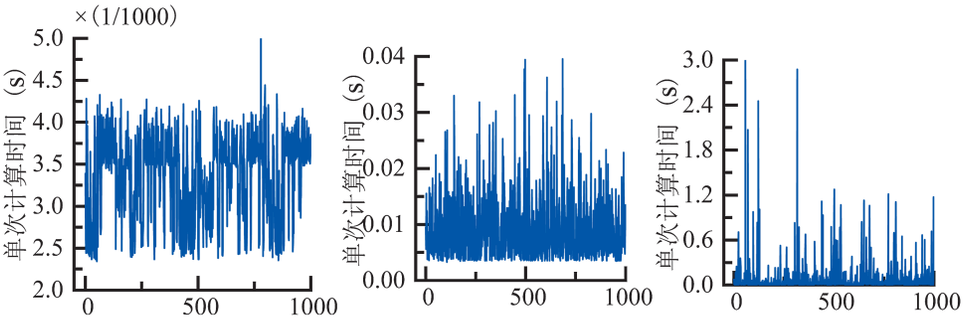
3　总结

文中利用仿真模拟现实观测值，分别在大、小旋转角情况下进行坐标转换模型约束与非约束解法的计算，并利用外推点来检核解算的参数，与真值进行比较，对转换参数精度进行分析。实验结果表明：线性模型仅适合小旋转角情况下的坐标转换；在大旋转角情况下，非线性十三参数解法（虚



（1）布尔莎模型　　（2）非线性七参数模型　　（3）非线性十三参数模型

图 3　大旋转角下外推点的差值序列



（1）非线性七参数模型　　（2）虚拟观测值法　　（3）约束条件法

图 4　大旋转角下各模型单次仿真计算时间

拟观测值法）更适合来解算转换参数。

参考文献：

[1] 张飞，王建强，罗寒 . 七参数坐标转换模型的比较分析 [J]. 测绘与空间地理信息，2016，39（5）：48–51.

[2] 孔钰如 . 基于布尔莎模型的坐标转换算法 [J]. 科技风，2021（4）：1–2.

[3] 尹慧芳，党亚民，郑作亚 . 济宁矿区坐标转换精度影响因素的分析 [J]. 北京测绘，2011（3）：4–7.

[4] 曾文宪，陶本藻 . 三维坐标转换的非线性模型 [J]. 武汉大学学报·信息科学版，2003，28（5）：566–568.

[5] 姚宜斌，黄承猛，李程春，等 . 一种适用于大角度的三维坐标转换参数求解算法 [J]. 武汉大学学报·信息科学版，2012，37（3）：253–256.

[6] Grafarend E W，Awange J L. Nonlinear analysis of the three–dimensional datum transformation[conformal group C_7（3）[J].Journal of Geodesy，2003，77（1/2）：66–76.

[7] 吕志鹏，伍吉仓，公羽 . 利用四元数改进大旋转角坐标变换模型 [J]. 武汉大学学报·信息科学版，2016，41（4）：547–553.

[8] 王世达，潘国荣 . 大旋转角空间相似变换的封闭解模型研究 [J]. 测绘地理信息，2021，46（S1）：282–287.

[9] 陈义，沈云中，刘大杰 . 适用于大旋转角的三维基准转换的一种简便模型 [J]. 武汉大学学报·信息科学版，2004，29（12）：1101–1105.

[10] 马下平，张中成，师芸，等 . 附有约束条件的大旋转角三维坐标转换 [J]. 测绘科学，2019，44（8）：13–18.

[11] 魏二虎，殷志祥，李广文，等 . 虚拟观测值法在三维坐标转换中的应用研究 [J]. 武汉大学学报·信息科学版，2014，39（2）：152–156.

（上接第 13 页）

（2）在引起应力集中程度方面，没有方案具有绝对优势。四个平面的应力集中系数取平均值，方案四最小为 1.542，方案一其次为 1.545，方案二和三基本一致为 1.553，相对而言先开挖一层导洞再开挖另一层导洞这种常用的施工方案，要优于上下层导洞之间交错开挖。

（3）极值点基本都处于车站靠横通道进口一侧，可以看出横通道的存在使得施工导洞时，在交叉区域形成较为明显的应力集中现象，施工中需要做好交叉口的支护作业来应对这一问题。

（4）塑性区分布方面，方案四分布范围最小，方案一其次，方案二和三分布范围均较大。

（5）从应力集中程度、塑性区分布范围和施工便利性的角度综合考虑，可在实际施工中优先选用方案四和方案一。未来可以进一步在相似工程现场布设应力监测点采集数据，对比数值模拟结果，验证研究成果的可靠性。

参考文献：

[1] 高志刚 . 柱洞法在北京地铁车站工程施工中的应用 [J]. 城市轨道交通研究，2017，20（5）：127–133.

[2] 许亚斋，余鹏 . 棚盖暗作法 PBA 地铁车站沉降规律探讨 [J]. 铁道标准设计，2019，63（12）：130–136.

[3] 陈庆章 . 砂卵石地层中 PBA 工法导洞开挖顺序对地表沉降的影响 [J]. 铁道建筑，2017，57（9）：81–84.

[4] 刘加柱，孙礼超，张壮，等 . 地铁车站 PBA 洞桩法施工力学效应研究 [J]. 地下空间与工程学报，2018，14（S1）：240–247，307.

[5] 罗富荣，汪玉华 . 北京地区 PBA 法施工暗挖地铁车站地表变形分析 [J]. 隧道建设，2016，36（1）：20–26.

[6] 王峥峥，郭翔宇 . 地铁车站洞桩法施工对地层沉降影响研究 [J]. 大连理工大学学报，2016，56（3）：257–262.

[7] 朱宝磊 . 大空间地铁车站洞桩法施工力学效应研究 [D]. 徐州：中国矿业大学，2015.

[8] 姚君华，宋文杰，董军 .PBA 工法导洞不同开挖顺序对地表沉降的影响 [J]. 公路，2013，58（1）：298–302.

[9] 王杨 .PBA 工法导洞开挖顺序对地层沉降的影响分析 [J]. 特种结构，2016，33（5）：10–13.

[10] 单仁亮，黄博，李润军，等 .PBA 车站导洞双向开挖方案比选 [J]. 沈阳建筑大学学报（自然科学版），2016，32（2）：200–208.

[11] 任建喜，曹西太郎 .PBA 法地铁车站施工诱发地表变形规律研究 [J]. 铁道工程学报，2018，35（9）：88–92.

[12] 纪文杰，黄博，姚直书，等 .PBA 工法横通道及导洞施工对地表沉降的影响 [J]. 安徽理工大学学报（自然科学版），2020，40（1）：21–26.

[13] 陈孟乔，牛煜虹，刘学彦 . 砂土地层盾构隧道开挖面土体应力状态分析 [J]. 隧道建设，2015，35（S2）：22–25.

[14] 程邦富，程林 . 某软弱围岩公路隧道开挖工法数值模拟与监测数据对比分析 [J]. 安徽建筑大学学报，2020，28（1）：7–13.

[15] 丁祖德，汪伟伟，文锦诚，等 . 考虑开挖应力路径的浅埋偏压隧道施工顺序探讨 [J]. 昆明理工大学学报（自然科学版），2020，45（6）：140–148.