

T 形截面悬臂柱自重下弯扭屈曲无穷级数解与 FEM 验证

张文福^{1, 2}, 吴宇¹, 黄斌², 杭昭明³

(1. 安徽建筑大学 土木工程学院, 安徽 合肥 230601; 2. 南京工程学院 建筑工程学院, 江苏 南京 211167;
3. 东北石油大学 土木建筑工程学院, 黑龙江 大庆 163318)

摘要: 以自重作用下的 T 形截面悬臂柱为研究对象, 研究其屈曲模态及屈曲荷载。基于板-梁理论和能量变分原理, 建立了位移和转角的变形曲线为三角函数无穷级数形式的 T 形截面弯扭屈曲总势能方程。根据悬臂柱的边界条件、势能驻值原理, 并引入无量纲参数, 获得了 T 形截面悬臂柱在自重作用下的弯扭屈曲无量纲无穷级数解。运用 ANSYS 有限元分析软件计算了长细比 ≥ 50 的 6 组 T 形截面悬臂柱在自重荷载下的特征值屈曲解, 并与位移函数取 50 项的精确理论解对比, 最大误差为 1.45%; 且随着长细比增大, 误差越来越小。

关键词: 悬臂柱; 弯扭屈曲; 能量变分原理; 有限元分析

中图分类号: TU39

文献标识码: A

文章编号: 2095-8382(2022)04-001-05

Infinite Series Solution and FEM Verification of Lateral-torsional Buckling of A T-section Cantilever Column Under Its Own Weight

ZHANG Wenfu^{1, 2}, WU Yu¹, HUANG Bin², HANG Zhaoming³

(1. College of Civil Engineering, Anhui Jianzhu University, Hefei 230601, China;

2. School of Architectural Engineering, Nanjing Institute of Technology, Nanjing 211167, China;

3. School of Civil Engineering and Architecture, Northeast Petroleum University, Daqing 163318, China)

Abstract: Taking a T-section cantilever column under its own weight as the object to study its buckling mode and buckling load. Based on the Beam and Plate Theories and the variational principle, the total potential energy equation of T-section lateral-torsional buckling is established and the deformation curves of displacement and rotation angle are in the form of trigonometric infinite series. Considering the boundary conditions of the cantilever column and the principle of stationary potential energy, the non-dimensional parameters are introduced to obtain the non-dimensional infinite series solution of the lateral-torsional buckling of the column under its own weight. The buckling solutions of six groups of T-section cantilever columns with slenderness ratio ≥ 50 were obtained with software ANSYS and compared with the exact solution of the displacement function taking 50 terms. The maximum error reaches 1.45%, and the error becomes smaller as the slenderness ratio increases.

Keywords: cantilever column; lateral-torsional buckling; variational principle of energy; finite element analysis

T 形截面是钢结构轴心受力构件中的一类重要的截面形式。T 形截面构件可通过焊接、轧制或

H 型钢剖分获得, 具有易加工的优点, 广泛应用于钢结构轴压构件中, 而其在轴压作用下容易发生弯

收稿日期: 2021-05-27

基金项目: 国家自然科学基金项目(51178087, 51578120)

作者简介: 张文福(1965-), 男, 教授, 博士, 博士生导师, 主要从事钢结构、组合结构方面的研究。

扭屈曲,需要对其稳定承载力进行分析。

国内外学者对薄壁 T 形截面构件轴压稳定性的研究主要集中在理论、有限元模拟以及规范对比方面。Mohri^[1]研究了包括 T 形截面在内的薄壁构件受压的后屈曲平衡曲线。郭兵等^[2]分别对 T 形截面轴压钢构件的翼缘和腹板做了屈曲分析,提出了翼缘和腹板的宽厚比限值公式。申红侠^[3]研究了《钢结构设计规范》(GB50017-2003)所提出的焊接 T 形截面轴心压杆弯扭屈曲的换算长细比法,使用有限元分析软件 ANSYS 验证了规范的合理性。熊晓莉等^[4-5]提出了一种 T 形截面压杆设计计算的新方法——折算长细比法,并研究了剖分 T 型钢压杆轴向压力分别作用于形心和剪心时的整体稳定性。吴金池等^[6]归纳总结了中、美钢结构规范关于双角钢 T 形截面构件受压稳定承载力设计方法的差异。近年来关于薄壁构件有限元分析方法和理论研究也有所进展。张磊等^[7]提出了壳体单元模型精确模拟薄壁构件整体稳定性的方法。张文福^[8]以双轴对称的工字形轴压钢柱为例,在 Kirchhoff 薄板理论和 Euler 梁理论的基础上建立了一种开口薄壁构件弯扭屈曲新理论。对于矩形悬臂柱因自身重量而屈曲的问题,即著名的“旗杆问题”,自重产生的轴向压力沿着杆长方向连续分布,对应的屈曲平衡方程是变系数的微分方程,通常采用能量法、有限单元法等近似方法求解。张文福^[9]采用能量变分法,运用 Matlab 计算软件得到了矩形悬臂柱自重荷载下位移函数取 50 项的弯曲屈曲精确解。

本文基于板-梁理论^[10]和能量变分原理^[11]解决了 T 形截面悬臂柱在自重下的弯扭屈曲问题,得出了 T 形截面悬臂柱在自重作用下的弯扭屈曲荷载。运用 ANSYS 有限元分析软件验证理论计算结果,结果表明了理论的正确性,可为工程设计提供参考。

1 理论计算

1.1 板-梁理论

以图 1 所示的 T 形截面柱为研究对象,引入了两套坐标系:整体坐标系 xyz 和局部坐标系 nsz。这两套坐标系与 Vlasov 坐标系类似,均符合右手螺旋法则,整体坐标系的原点选在截面形心 C,各

板件的局部坐标系原点选在板件形心。

已知:钢柱的长度为 L ;翼缘的宽度为 b ;厚度为 t_f ;翼缘的弹性模量为 E_f ,剪切模量为 G_f ,泊松比为 μ_f ;腹板的高度为 h_w ,厚度为 t_w ;腹板的弹性模量为 E_w ,剪切模量为 G_w ,泊松比为 μ_w 。

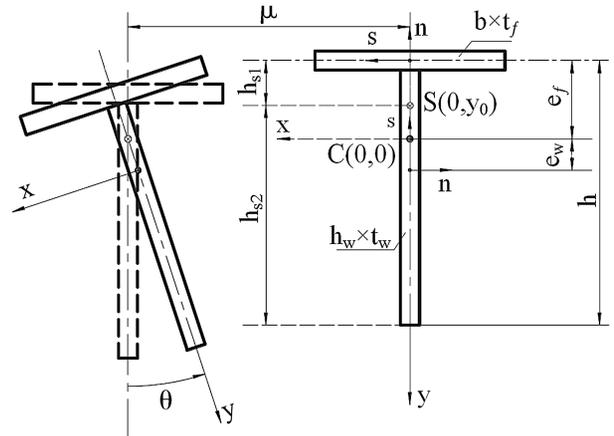


图 1 T 形截面的坐标系与变形图

板-梁理论的基本假设为钢周边假设和变形分解假设,其中平面内弯曲变形根据 Timoshenko 梁力学模型确定;平面外扭转变形根据 Kirchhoff 板力学模型确定。由此推导得出了形心和剪心的新定义,详见文献[10],此定义适用于不同材料组合截面的构件。

T 形截面柱的总应变能可表示为

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left(EI_y \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)^2 + EI_\omega \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right)^2 + GJ_k \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 \right) dz \quad (1)$$

腹板的初应力势能可表示为

$$V_w = - \frac{E_w P}{(EA)_{comp}}$$

$$\int_0^L \left(\frac{1}{2} A_w \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 - A_w \Delta_1 \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + \left(\frac{1}{24} h_w^3 t_w^3 + \frac{1}{24} h_w t_w^3 + \frac{1}{2} h_w t_w \Delta_1^2 \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 \right) dz \quad (2)$$

其中, $\Delta_1 = e_w - y_0$ 。翼缘的初应力势能可表示为

$$V_f = -\frac{E_f P}{(EA)_{comp}} \int_0^L \left[\frac{1}{2} A_f \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 - A_f \Delta_2 \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + \left(\frac{1}{24} b^3 t_f^3 + \frac{1}{24} b t_f^3 + \frac{1}{2} b t_f \Delta_2^2 \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 \right] dz \quad (3)$$

其中, $\Delta_2 = e_f + y_0$ 。

因此,总的初应力势能为

$$V = V_w + V_f = -\frac{1}{2} \int_0^L \left[q(L-z) \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + q(L-z) (r_p)_{comp}^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 + 2q(L-z) y_0 \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \right] dz \quad (4)$$

其中, $(r_p)_{comp}^2$ 为张文福^[10]依据板-梁理论推导得到的截面对剪切中心的极回转半径的平方,可以考虑翼缘和腹板为不同材料的情况。

$$(r_p)_{comp}^2 = \frac{(EI_x)_{comp} + (EI_y)_{comp}}{(EA)_{comp}} + y_0^2 \quad (5)$$

$$(EI_x)_{comp} = E_w \left(\frac{1}{12} h^3 t_w \right) + E_f \left(\frac{1}{12} b t_f^3 \right) + (E_w A_w e_w^2 + E_f A_f e_f^2) \quad (6)$$

$$(EI_y)_{comp} = E_w \left(\frac{1}{12} h t_w^3 \right) + E_f \left(\frac{1}{12} b^3 t_f \right) \quad (7)$$

其中,

$$h_{s1} = \frac{\left(\frac{h t_w^3}{12} \right) \left(\frac{h + t_f}{2} \right)}{\left(\frac{h t_w^3}{12} \right) + \left(\frac{t_f b^3}{12} \right)} \quad (8)$$

$$y_0 = h_{s1} - e_f \quad (9)$$

对于使用同一种材料的情况,有

$$e_f = \frac{A_w \left(\frac{h + t_f}{2} \right)}{A_w + A_f} \quad (10)$$

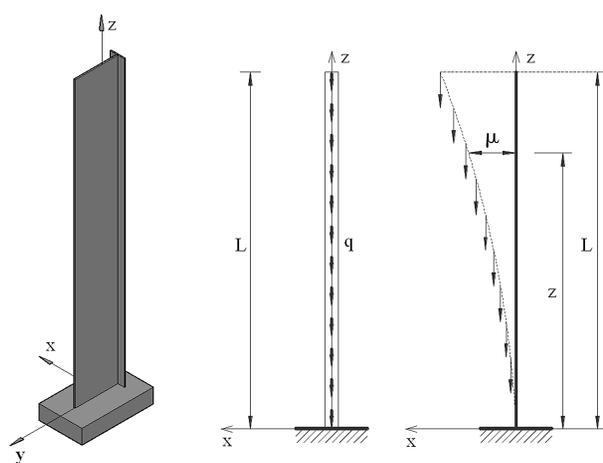
$$e_w = \frac{h - t_f}{2} - e_f \quad (11)$$

综上,T形截面柱在自重下发生弯扭屈曲的总势能可以表示为

$$\Pi = U + V = \frac{1}{2} \int_0^L \left[EI_y \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)^2 + EI_\omega \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right)^2 + GJ_k \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 - P \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 - P (r_p)_{comp}^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 - 2P y_0 \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \right] dz \quad (12)$$

1.2 弯扭屈曲无穷级数解

根据一端固接一端自由的边界条件,未知函数绕剪心的转角 $\theta(z)$ 和剪力沿 x 轴的侧移 $u(z)$ 如图2所示,设为



(a) 模型整体图

(b) 悬臂柱变形图

图2 自重下T形截面悬臂柱计算简图

$$u(z) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[h A_{2n-1} \left(1 - \cos \left(\frac{(2n-1)\pi z}{2L} \right) \right) \right] \quad (13)$$

$$\theta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[B_{2n-1} \left(1 - \cos \left(\frac{(2n-1)\pi z}{2L} \right) \right) \right] \quad (14)$$

因此,

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{A_{2n-1} h (-1+2n) \pi \sin \left(\frac{(-1+2n)\pi z}{2L} \right)}{2L} \right] \quad (15)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{A_{2n-1} h (-1+2n)^2 \pi^2 \cos\left(\frac{(-1+2n)\pi z}{2L}\right)}{4L^2} \right) \quad (16)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{B_{2n-1} (-1+2n) \pi \sin\left[\left(\frac{(-1+2n)\pi z}{2L}\right)\right]}{2L} \right) \quad (17)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{B_{2n-1} (-1+2n)^2 \pi^2 \cos\left(\frac{(-1+2n)\pi z}{2L}\right)}{4L^2} \right) \quad (18)$$

将式(15)~(18)代入式(12),根据势能驻值原理,即作用着外力的结构体系,其位移有微小变化而总的势能不变,即总的势能有驻值时,则该结构体系处于平衡状态,可表示为

$$\delta \Pi = \delta(U+V) = 0 \quad (19)$$

为求得极限屈曲荷载,先计算

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial A_i} &= 0, i=1,3,5,\dots,2n-1 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial B_i} &= 0, i=1,3,5,\dots,2n-1 \end{aligned} \quad (20)$$

将式(20)乘以 $\frac{L^3}{h^2 EI_y}$,并引入以下无量纲参

数和相关表达式

$$k_1 = \frac{t_f}{h}, k_2 = \frac{b}{h}, k_3 = \frac{t_w}{h}, k_4 = \frac{L}{h} \quad (21)$$

$$EI_\omega = EI_y \frac{(k_1 h)^2}{12}, GJ_k = 2 \left(\frac{k_1}{k_2} \right)^2 EI_y \quad (22)$$

$$q = \frac{\tilde{q} EI_y \pi^2}{L^2} \quad (23)$$

所得的无量纲屈曲方程用矩阵形式表示为

$$\begin{bmatrix} {}^0R & {}^0S \\ {}^0T & {}^0Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \tilde{M}_0 \begin{bmatrix} {}^1R & {}^1S \\ {}^1T & {}^1Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \quad (24)$$

上述方程的解即为所求单轴对称 T 形截面悬臂柱受轴向压力发生弯扭屈曲时的临界屈曲荷载。

2 有限元验证

2.1 建立有限元模型

2.1.1 选择单元

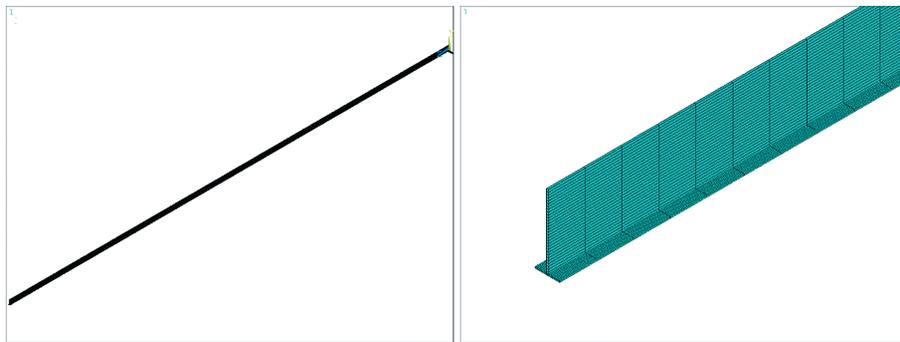
借助有限元分析软件 ANSYS 对自重荷载作用下的 T 形截面悬臂柱的屈曲行为进行数值模拟。为了精确模拟薄壁构件整体稳定性,单元选用 4 节点有限应变壳单元 SHELL181。

2.1.2 定义几何参数和材料本构关系

柱高为 L , T 形截面腹板高为 $h_w=0.3$ m, 厚度为 $t_w=0.008$ m, 翼缘宽度为 $b=0.1$ m, 厚度为 $t_f=0.006$ m, 钢材取 Q235 型号的钢材, 弹性模量 $E_s=1.06 \times 10^5$ MPa, 泊松比为 $\mu_s=0.3$ 。

2.1.3 建立几何模型并划分网格

建立一个腹板高为 h_w , 厚度为 t_w , 翼缘宽度为 b , 厚度为 t_f 的 T 形截面柱, 如图 3 所示。



(a) 模型整体图

(b) 柱细部图

图 3 模型概况

2.1.4 施加约束

有限元模型模拟悬臂柱,需模拟一端固定的边界条件,即限制一端全部节点的 3 个平动和 3 个转动自由度,如图 4 所示。

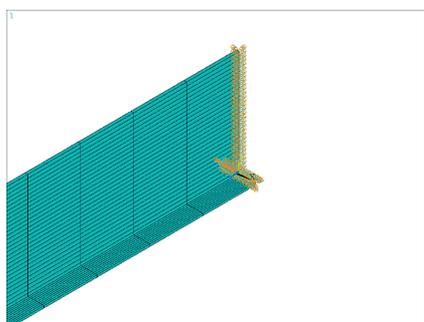


图 4 约束边界条件图

2.1.5 施加荷载

通过对模型上所有的节点施加单位荷载 1 来模拟柱体所受的自重荷载,如图 5 所示。

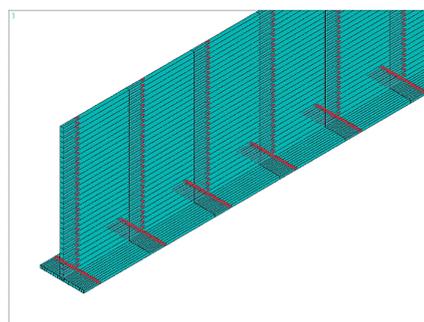


图 5 荷载施加情况

2.1.6 求解

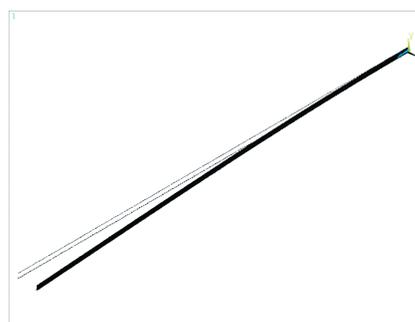
根据有限元屈曲分析的一般步骤,先进行静力分析,再选择 ANTYPE, BUCKLE 命令进行特征值屈曲分析。

2.1.7 后处理

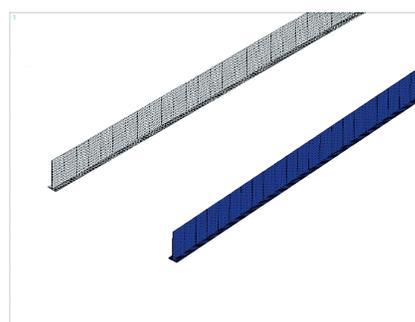
后处理器可导出弯扭屈曲模态图和屈曲荷载系数表,最终的屈曲荷载为最小屈曲荷载系数与所施加的荷载的乘积。由图 6(c) 断面图可以看出截面发生了侧向弯曲屈曲以及扭转,即为 T 形截面悬臂柱轴压作用下的弯扭屈曲模态。

2.2 有限元验证

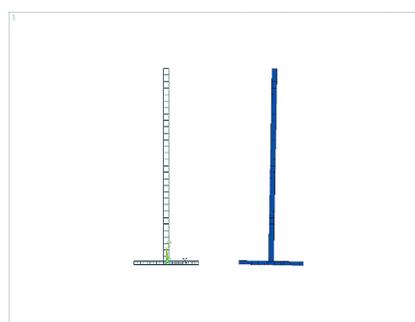
本文较为细致地分析了长细比因素的影响,分别建立了长细比为 50、100、150、200、250、300 的 6 组悬臂细长柱有限元模型,屈曲荷载有限元模拟结果与理论推导所得的结果如表 1 所示。



(a) 屈曲整体图



(b) 屈曲局部图



(c) 断面图

图 6 屈曲形态图

表 1 有限元结果与理论结果的对比

L/b	P_{cr} (50 项解析解) /kN	P_{cr} (FEM 解) /kN	误差 1%
50	4 567.95	4 635.16	1.45
100	1 147.43	1 158.79	0.98
150	507.03	511.34	0.84
200	287.73	290.08	0.81
250	184.31	185.74	0.77
300	128.03	129.01	0.76

注:误差 = $(P_{cr}(50 \text{ 项解析解}) - P_{cr}(\text{FEM 解})) / P_{cr}(\text{FEM 解})$

从表 1 可看出,本例中公式推导所得到的结果与有限元结果的误差均在 1.5% 以内,已经完全达到工程计算对精确度的要求。并且,两者的误差随着长细比的增大而减小。

(下转第 26 页)

- Materials Science, 2020, 56 (3): 425-431.
- [3] 王燕舞, 黄小平, 崔维成. 船舶结构钢海洋环境点蚀模型研究之一: 最大点蚀深度时变模型 [J]. 船舶力学, 2007, 11 (4): 577-586.
- [4] 王燕舞, 吴晓源, 张雨华, 等. 船舶结构钢海洋环境点蚀模型研究之二: 实船蚀坑形态与径深比时变模型 [J]. 船舶力学, 2007, 11 (5): 735-743.
- [5] Nakai T, Matsushita H, Yamamoto N, et al. Effect of pitting corrosion on local strength of hold frames of bulk carriers (1st report) [J]. Marine Structures, 2004, 17 (5): 403-432.
- [6] 马厚标, 杨颀, 贾紫月. 考虑点蚀损伤的 NV-D36 海工高强结构钢拉伸性能试验研究 [J]. 哈尔滨工程大学学报, 2018, 39 (8): 1283-1289.
- [7] Rahbar-Ranji A. Ultimate strength of corroded steel plates with irregular surfaces under in-plane compression [J]. Ocean Engineering, 2012, 54: 261-269.
- [8] Silva J E, Garbatov Y, Soares C G. Ultimate strength assessment of rectangular steel plates subjected to a random localised corrosion degradation [J]. Engineering Structures, 2013, 52: 295-305.
- [9] Karagah H, Shi C, Dawood M, et al. Experimental investigation of short steel columns with localized corrosion [J]. Thin-Walled Structures, 2015, 87: 191-199.
- [10] 徐善华, 王皓, 苏磊, 等. 考虑点蚀损伤的锈蚀钢板延性退化 [J]. 东南大学学报 (自然科学版), 2016, 46 (6): 1257-1263.
- [11] 吴兆旗, 魏源, 王鑫涛, 等. 局部锈蚀圆钢管构件轴压力学性能正交试验研究 [J]. 工程力学, 2020, 37 (4): 144-152.
- [12] 史炜洲, 童乐为, 陈以一, 等. 腐蚀对钢材和钢梁受力性能影响的试验研究 [J]. 建筑结构学报, 2012, 33 (7): 53-60.
- [13] 林振东. 腐蚀影响下海洋平台结构的极限承载力研究 [D]. 镇江: 江苏科技大学, 2014.
- [14] 秦广冲, 兰涛, 苏健兴, 等. 不同参数下锈损 H 型钢柱抗震性能数值分析 [J]. 钢结构, 2018, 33 (10): 131-135.
- [15] 徐善华, 张宗星, 何羽玲, 等. 考虑蚀坑影响的腐蚀钢板力学性能退化试验研究 [J]. 西安建筑科技大学学报 (自然科学版), 2017, 49 (2): 164-171.

(上接第 5 页)

3 结论

(1) 板-梁理论可以求解自重荷载作用下的轴压构件屈曲荷载, 并且对于长细比大于 50 的细长 T 形截面悬臂柱误差在 1.5% 以内, 精度较高。

(2) ANSYS 有限元软件中 SHELL 单元适合用于分析薄壁构件, T 形截面悬臂柱在自重荷载作用下发生弯扭屈曲, 与理论假设相一致。

(3) 板-梁理论根据经典理论将薄壁构件各板件的屈曲变形分解为平面内的弯曲变形和平面外的扭转变形, 并分别按 Timoshenko 梁和 Kirchhoff 板力学模型确定, 根据能量变分原理计算求解。相较于传统 Vlasov 理论, 物理过程清晰明确、容易理解, 适合薄壁构件的屈曲分析。

参考文献:

- [1] Mohri F, Azrar L, Potier-Ferry M. Flexural-torsional post-buckling analysis of thin-walled elements with open sections [J]. Thin-Walled Structures, 2001, 39 (11): 907-938.
- [2] 郭兵, 毕研军, 李毅. 轴压 T 形钢的相关屈曲及板件宽厚比 [J]. 西安科技学院学报, 2001, 21 (2): 114-117.
- [3] 申红侠. 焊接 T 形截面轴心压杆的弯扭屈曲 [J]. 钢结构, 2006, 21 (3): 86-88, 82.
- [4] 熊晓莉. T 形截面钢压杆整体稳定计算的折算长细比法 [J]. 郑州大学学报 (工学版), 2013, 34 (2): 84-88.
- [5] 熊晓莉, 庞瑞. 剖分 T 型钢压杆整体失稳问题研究 [J]. 建筑结构, 2013, 43 (13): 58-62.
- [6] 吴金池, 俞栋华, 刘赞. 中美规范关于双角钢受压稳定承载力比较 [C]// 土木工程新材料、新技术及其工程应用交流会论文集 (下册). 2019: 746-750.
- [7] 张磊, 童根树. 薄壁构件整体稳定性的有限元模拟 [J]. 浙江大学学报 (工学版), 2011, 45 (3): 531-538.
- [8] 张文福. 工字形轴压钢柱弹性弯扭屈曲的新理论 [C]// 第十五届全国现代结构工程学术研讨会论文集. 2015: 739-749.
- [9] 张文福. 钢结构平面内稳定理论 - 上册 [M]. 武汉: 武汉理工大学出版社, 2018.
- [10] 张文福. 钢结构平面外稳定理论 - 下册 [M]. 武汉: 武汉理工大学出版社, 2019.
- [11] 陈骥. 钢结构稳定理论与设计 [M]. 5 版. 北京: 科学出版社, 2011.